CAPíTULO 12

A Equação de Laplace no Disco

Até aqui, todos os problemas que abordamos envolviam regiões retangulares, para as quais o sistema usual de coordenadas era suficiente. Se a região em questão tem um bordo circular, pode ser preferível trabalhar em coordenadas polares.

12.1. Laplaciano em Coordenadas Polares

Dada uma função real $u(x,y)$, podemos reescrevê-la em coordenadas polares usando a mudança de coordenadas

$$x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta$$

ou reversamente

$$r^2 = x^2 + y^2;\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Assim, obtemos uma nova função $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Vamos abusar a notação e chamar a nova função de u mesmo (ao invés de v). Nosso objetivo é escrever o Laplaciano $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ usando derivadas com relação a r e θ. Comece notando que

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{r} = \cos\theta; r_y = \frac{y}{r} = \sin\theta \\ \theta_x &= \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{\sin\theta}{r}; \theta_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\cos\theta}{r} \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x = \cos\theta \cdot u_r - \frac{\sin\theta}{r}\cdot u_\theta \\ u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y = \sin\theta \cdot u_r + \frac{\cos\theta}{r} u_\theta \end{aligned}$$

e novamente

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \cos^2\theta \cdot u_{rr} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}u_{r\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}u_r + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}u_\theta \\ u_{yy} &= \sin^2\theta \cdot u_{rr} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}u_{r\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}u_r - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}u_\theta \end{aligned}$$

Enfim, somando estas duas, chegamos à expressão do Laplaciano em coordenadas polares

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

12.2. Separação de Variáveis em Coordenadas Polares

Com a nova expressão do Laplaciano em mãos, podemos atacar o problema de Laplace em regiões "redondas". Por incível que pareça, um dos problemas mais simples trata de um semi-anel:

EXEMPLO 87. *Vamos resolver o seguinte problema de Laplace no semi-anel:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 1 < r < 3 \text{ e } 0 < \theta < \pi \\ u(1,\theta) = u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \text{ para } 0 \le \theta \le \pi \text{ e } 1 \le r \le 3 \\ u(3,\theta) = \sin 2\theta \text{ para } 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Procuremos soluções separadas da forma $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ para as duas primeiras linhas. A equação $\Delta u = 0$ nos dá

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rR').\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \Rightarrow -\frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{r}{R}\frac{d}{dr}(rR') = \lambda$$

onde λ é uma constante. Em suma, temos que resolver as seguintes EDOs

$$\begin{aligned} \Theta'' + \lambda\Theta &= 0 \\ \frac{d}{dr}(rR') &= \frac{\lambda R}{r} \end{aligned}$$

sujeitas às condições $R(1) = \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$.

Caso $\lambda \leq 0$*: Neste caso, as soluções para* $\Theta(\theta)$ *são exponenciais ou funções afins. Nenhuma delas serve, pois queremos* $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$.

Caso $\lambda > 0$ *: Então* $\Theta(\theta) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)$. *Para ter* $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$, *devemos ter* $\lambda = n^2$ *e* $C_1 = 0$, *onde* n *é um natural positivo. Assim,* $\Theta(\theta) = C_2 \sin(n\theta)$. *A equação em* R *nos dá*

$$(rR')' = \frac{n^2 R}{r} \Rightarrow r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

que é uma equação de Euler[1] *cuja solução geral é da forma*

$$R(r) = C_3 r^n + C_4 r^{-n}$$

Como queremos $R(1) = 0$, *devemos ter* $C_3 = -C_4$, *isto é,* $R(r) = C_3\left(r^n - r^{-n}\right)$.

Juntando tudo, encontramos as seguintes soluções separadas

$$u_n(r,\theta) = c_n\left(r^n - r^{-n}\right)\sin(n\theta)$$

Por superposição, espera-se que

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(r^n - r^{-n}\right)\sin(n\theta)$$

seja a solução do problema desejado – basta agora calibrar as constantes c_n *para que se adaptem à última condição de contorno* $u(3,\theta) = f(\theta) = \sin 2\theta$. *Em geral, precisaríamos abrir* $f(\theta)$ *em sua série de senos* $\sum b_n \sin(n\theta)$ *para tomar então*

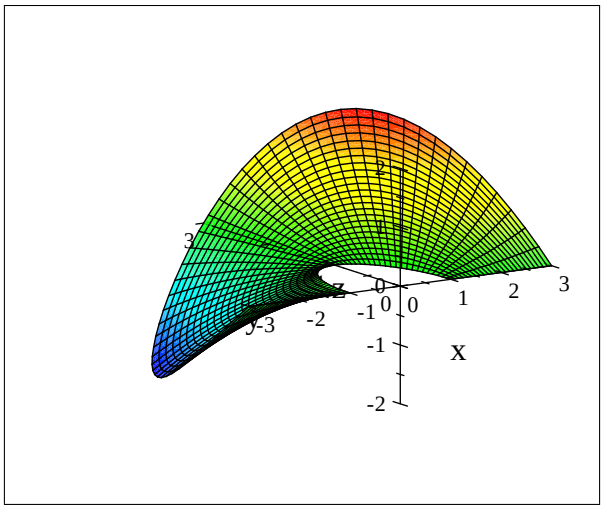
$$c_n\left(3^n - 3^{-n}\right) = b_n \Rightarrow c_n = \frac{b_n}{3^n - 3^{-n}}$$

Neste caso, porém, tivemos sorte – $f(\theta) = \sin 2\theta$ *é sua própria série em senos, isto é,* $b_2 = 1$ *e* $b_m = 0$ *para* $m \neq 2$. *Assim, a solução desejada é simplesmente* $c_2 = \frac{b_2}{3^2 - 3^{-2}} = \frac{1}{80/9} = \frac{9}{80}$, *isto é*

$$u(r,\theta) = \frac{9}{80}\left(r^2 - r^{-2}\right)\sin 2\theta$$

ou, de volta às coordenadas cartesianas

$$u(x,y) = \frac{9}{40}\frac{\left(x^2+y^2+1\right)\left(x^2+y^2-1\right)xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$



Se a região for um círculo, há algumas condições de contorno “escondidas". Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 88. *Seja* $f(\theta)$ *uma função periódica de período* 2π. *Mostremos que a solução* ***finita*** *do seguinte problema de Laplace no círculo de raio* a

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 0 \leq r < a \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(a,\theta) = f(\theta) \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

[1] Para relembrar a solução da Equação de Euler

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

veja os exercícios.

é

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) + b_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\theta) \right) \\ \text{onde } f(\theta) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \end{aligned}$$

De fato, usando o método de separação de variáveis, chegamos novamente às EDOs

$$\begin{aligned} \Theta'' + \lambda\Theta &= 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R &= 0 \end{aligned}$$

Note que queremos que Θ ***seja periódica de período*** 2π*, já que, em coordenadas polares,* $\theta = \alpha$ *e* $\theta = \alpha + 2\pi$ *representam o mesmo ponto e, portanto,* u *deve assumir o mesmo valor para* $\theta = \alpha$ *e* $\theta = \alpha + 2\pi$*. Assim, o caso* $\lambda < 0$ *não nos interessa (pois* Θ *seria uma combinação de funções exponenciais).*

No caso $\lambda = 0$ *temos que* Θ *é uma função afim, o que só é periódica se for constante. Aí*

$$rR'' + R' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(rR') = 0 \Rightarrow rR' = C_1 \Rightarrow R = C_1 \ln r + C_2$$

como $\ln r \to -\infty$ *quando* $r \to 0+$*, para que a solução seja finita, precisamos tomar* $C_1 = 0$*. Assim, a única solução encontrada para* $\lambda = 0$ *é* $u_0(x,t) = c_0 = cte$*.*

Enfim, se $\lambda > 0$ *voltamos ao caso do exemplo anterior. Temos*

$$\Theta(\theta) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)$$

Como queremos que Θ *seja periódica de período* 2π*, precisamos tomar* $\lambda = n^2$*. Então, analogamente ao exemplo anterior:*

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta) \\ R(r) &= C_3 r^n + C_4 r^{-n} \end{aligned}$$

Mais uma vez, para que a solução seja finita quando $r \to 0^+$*, precisamos tomar* $C_4 = 0$*. Assim, encontramos as seguintes soluções separadas*

$$u_n(r,\theta) = r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Superpondo tudo, esperamos ter uma solução da forma

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Enfim, tomando $r = a$*, vem a condição*

$$u(a,\theta) = f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

o que indica que esta é a série de Fourier de f*. Em outras palavras, temos*

$$A_0 = \frac{a_0}{2};\ A_n = \frac{a_n}{a^n};\ B_n = \frac{b_n}{a^n} \text{ onde } f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

demonstrando a afirmação original.

COMENTÁRIO 89. *É interessante escrever esta expressão usando a forma complexa. Ficaríamos ao invés com*

$$u(r,\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in\theta} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_{-n} \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{-in\theta}$$

no caso em que $f(\theta)$ *é uma função real, sabemos que* c_n *e* c_{-n} *são conjugados, portanto os somatórios são conjugados um do outro. Então*

$$u(r,\theta) = c_0 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in\theta} \right)$$

ou, trocando a representação do plano xy *pelo plano complexo via* $z = x + iy = re^{i\theta}$*:*

$$u(z) = \mathrm{Re}\left(c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n \left(\frac{z}{a}\right)^n \right) \text{ onde } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta} d\theta$$

Note que a expressão entre parênteses é uma série de potências genérica[2] *em* z.

12.3. Exercícios

1) Usando a Regra da Cadeia, encontre expressões para u_{rr}, u_r e $u_{\theta\theta}$ em termos das derivadas de u com relação a x e y. Substitua as expressões encontradas em

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

e deduza novamente que esta expressão é o Laplaciano.

2) Mostre que a função $y(x) = x^r$ é solução da equação de Euler

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

desde que r seja raiz de $r^2 + (a-1)r + b = 0$.

a) Conclua que, se $\Delta = (a-1)^2 - 4b > 0$, as raízes distintas r_1 e r_2 desta quadrática levam à solução geral $y(x) = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2}$.

b) Se $\Delta = 0$ e há apenas uma raiz dupla r, mostre que $y(x) = x^r(C_1 + C_2\ln x)$ é solução.

c) Enfim, se $\Delta < 0$ e as raízes são complexas da forma $\alpha \pm \beta i$, escreva $x^{\alpha\pm\beta i} = e^{(\alpha\pm\beta i)\ln x} = e^{\alpha\ln x}e^{\pm i(\beta\ln x)}$ para encontrar soluções do tipo $y = x^\alpha(C_1\cos(\beta\ln x) + C_2\sin(\beta\ln x))$.

3) a) Mostre que

$$u(x,y) = C_1\ln\left(x^2+y^2\right) + C_2$$

é uma solução da equação de Laplace em todo o plano, exceto na origem.

b) Mostre que

$$u(x_1,x_2,...,x_n) = \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2 \text{ onde } r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$$

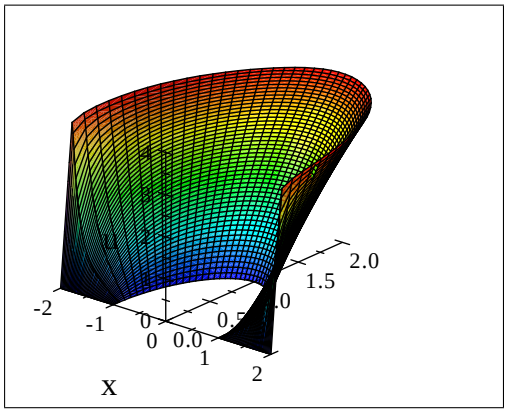
é uma solução da equação de Laplace em $\mathbb{R}^n$ (exceto na origem), a saber[3]:

$$\Delta u \doteq u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + ... + u_{x_nx_n} = 0$$

4) Encontre a solução $u(r,\theta)$ da equação de Laplace abaixo com as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 1 < r < 2 \text{ e } 0 < \theta < \pi \\ u(1,\theta) = u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \text{ para } 1 \le r \le 2 \text{ e } 0 \le \theta \le \pi \\ u(2,\theta) = 4 \text{ para } 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Resposta: $u(r,\theta) = \frac{16}{\pi}\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{r^n - r^{-n}}{2^n - 2^{-n}}\frac{\sin(n\theta)}{n}$



Problema 4

5) Encontre a solução **finita** $u(r,\theta)$ do seguinte problema de Laplace em coordenadas polares no semi-círculo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 0 < r < 2 \text{ e } 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \text{ para } 0 \le r \le 2 \text{ e } 0 \le \theta \le \pi \\ u(2,\theta) = 8 \text{ para } 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

[2] De fato, $u(z)$ é qualquer função analítica complexa, tanto sua parte real quanto sua parte imaginária são harmônicas!

[3] Em particular, em $\mathbb{R}^3$, as soluções $u(x,y) = C/r$ são indicativas de vários potenciais energéticos que são "proporcionais ao inverso da distância-- como a energia potencial gravitacional, por exemplo.

6) Encontre a solução **finita** $u(r,\theta)$ do seguinte problema de Laplace em coordenadas polares no círculo de raio A

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 0 \leq r < A \text{ e } \theta \in \mathbb{R} \\ u_r(A,\theta) = f(\theta) \text{ para } \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

onde f é uma função periódica de período 2π. **Que outra condição f deve satisfazer para tal solução existir?**

Resposta:

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{nA^{n-1}} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right) \\ &\quad \textit{onde} \\ A_0 &\in \mathbb{R} \textit{ (arbitrário)} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

A condição para esta solução funcionar é que $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = 0$ – ou seja, o fluxo total de calor através da borda tem que ser nulo para que haja um estado estacionário!

7) a) Use a identidade $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ para descobrir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

sempre que $|r| < 1$.

b) Vimos que a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 0 \leq r < a \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(a,\theta) = f(\theta) \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

é

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) + b_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\theta) \text{ onde } a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos(n\alpha)\,d\alpha \text{ e } b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin(n\alpha)\,d\alpha.$$

Substitua os valores de a_n e b_n na expressão de $u(r,\theta)$ e use o item (a) para chegar à fórmula

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha)} f(\alpha)\,d\alpha$$

que é a chamada *Integral de Poisson* que representa a solução da equação do potencial.